Musterlösung
Originalklausur Abitur

DUDEN

Bundesland:	Nordrhein-Westfalen
Prüfungsfach:	Mathematik
Jahrgang:	2009
Autorin:	Tamara Jordan

HT1 Analysis

a) Die Pflanze erreicht innerhalb der ersten 20 Tage eine Höhe von $60\ cm$. Deshalb wird zum Lösen dieser Aufgabe die Funktion h benötigt. Zu lösen ist die Gleichung $h(t) = 0,5 \Leftrightarrow 0,2 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9} = 0,5 \Leftrightarrow 0,1 \cdot t - 0,9 = ln(2,5) \Leftrightarrow t \approx 18,2$. Nach 18 Tagen und ca. 5h hat der Strauch eine Höhe von $50cm$ erreicht.

b) Das schnellste Wachstum ist normalerweise an der Wendestelle (von einer links Kurve in eine rechts Kurve) zu finden, da hier die Wachstumsgeschwindigkeit h' ein Maximum hat. Allerdings haben wir es hier mit einer Exponentialfunktion zu tun. Diese besitzt keine Wendestelle. Ihre größte Steigung besitzt die Funktion h am rechten Intervallende, d. h. für $t = 20$. Zur Berechnung der tatsächlichen Wachstumsgeschwindigkeit muss zunächst die Ableitung der Funktion h gebildet werden: $h'(t) = 0,02 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9} \Rightarrow h'(20) \approx 0,06$. 20 Tage nach dem Auspflanzen erreicht er seine maximale Wachstumsgeschwindigkeit von $6 \frac{cm}{d}$. Natürlich kann die Funktion h nur in einem begrenzen Zeitraum die Wachstumsgeschwindigkeit des Strauches darstellen, da der Strauch sonst mit unendlicher Geschwindigkeit unendlich groß werden würde.

c) Die Funktion z beschreibt die Zuwachsrate ab dem 21. Tag. Das Integral dieser Funktion addiert mit der Strauchhöhe am 20.Tag beschreibt die Höhe des Strauches ab dem 21. Tag.
$\Rightarrow h_2(t) = 0,6 + \int_{20}^{t} 0,02 \cdot e^{-0,1 \cdot x + 3,1}\ dx = 0,6 + [-0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot x + 3,1}]_{20}^{t} = 0,6 + (-0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1} + 0,2 \cdot e^{1,1}) \approx 1,2 - 0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1}$.
Betrachtet man diesen Term erkennt man, dass mit steigendem t die e-Funktion immer kleiner ($\rightarrow 0$) wird $\Rightarrow \lim_{t \to \infty} 1,2 - 0,2 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1} = 1,2$. Der Strauch wird maximal 1,2m hoch.

d) (1) Die folgenden Gleichungen sind zu lösen:
I) $f_1(0) = 0,08 \rightarrow 1,2 - c = 0,08 \Leftrightarrow c = 1,12$
II) $f_1(20) = 0,6 \rightarrow 1,2 - c \cdot e^{-20k} = 0,6$
$\Leftrightarrow$ c in die zweite Gleichung einsetzen: $1,2 - 1,12 \cdot e^{-20k} = 0,6 \Leftrightarrow -20k = ln(\frac{0,6}{1,12}) \Leftrightarrow k \approx 0,0312$.

(2) $f_2(0) = \frac{0,096}{0,08+1,12} = 0,08$ und $f_2(20) = \frac{0,096}{0,08+1,12 \cdot e^{-2,64}} \approx 0,60$. Die Modellfunktion f_2 beschreibt die Strauchhöhe zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 20$ sehr gut.
Für wachsende t strebt die e-Funktion $e^{-0,132 \cdot t} \rightarrow 0$. Deswegen gilt für den Grenzwert

$$\lim_{t \to \infty} \frac{0,096}{0,08 + 1,12 \cdot e^{-0,132 \cdot t}} = \frac{0,096}{0,08} = 1,2.$$

Im Limes nähert sich die Funktion f_2 demzufolge von unten dem Wert 1,2 an. Um zu zeigen, dass der Wert $1,2$ tatsächlich nicht überschritten wird, muss gezeigt werden, dass die Funktion

f_2 monoton wächst. Dies trifft tatsächlich zu, da es sich bei der Funktion f_2 um eine Exponentialfunktion handelt und diese immer monoton sind. Man kann aber auch die Gleichung lösen: $f_2(t) = \frac{0{,}096}{0{,}08+1{,}12\cdot e^{-0{,}132\cdot t}} = 1,2 \Leftrightarrow 0 = e^{-0{,}132\cdot t}$. Da die e-Funktion niemals null werden kann, nimmt die Funktion f_2 den Wert 1,2 selbst nicht an und kann ihn aufgrund ihrer Stetigkeit auch nicht überschreiten.

(3) Betrachtet man den Graphen der Funktion f_1 erkennt man, dass sich die Krümmung im abgebildeten Bereich nicht verändert. Der Strauch hat diesem Modell nach die größte Wachstumsgeschwindigkeit gleich nach dem Einpflanzen, also bei $t = 0$. Die Geschwindigkeit nimmt dann bis zur Grenzhöhe immer weiter ab. Man erkennt in Abb.3 sofort, dass die Funktion f_2 der tatsächlichen Wachstumsfunktion h sehr nahe kommt. Zunächst weist die Modellfunktion f_2 ein exponentielles Wachstum auf. Nach dem Wendepunkt ($t \approx 20$) geht die Funktion dann in beschränktes Wachstum über. Ab diesem Zeitpunkt wächst der Strauch langsamer und nähert sich seiner Grenzhöhe $h = 1,2m$.

(4) Zunächst wird eine Differenzfunktion d definiert: $d(t) = f(t) - h(t)$. Da f und h differenzierbare Funktionen sind, ist die neue Funktion d auch wieder differenzierbar. Nun werden die Nullstellen der Ableitungsfunktion d' im Intervall $[0; 20]$ berechnet. Die Beträge dieser lokalen Extremstellen werden mit den Randwerten $d(0)$ und $d(20)$ verglichen. Der betragsmäßig größte Wert ist die gesuchte maximale Differenz.

HT5 Analytische Geometrie

a) (1) $f_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f_1(\vec{x}) = 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f_1(\vec{x}) = 3 \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $f_1(\vec{x}) = 3 \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f_1(\vec{x}) - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot (\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}) \Leftrightarrow f_1(\vec{x}) - \vec{x}_Z = k_1(\vec{x} - \vec{x}_Z)$

(2) Die Ortskoordinaten der Punkte A und B werden in die Streckungsgleichung eingesetzt:
$f_1(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$
$f_1(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$.
Die Koordinaten der Bildpunkte lauten: $A'(-9; 1)$ und $B'(6; -8)$.

(3) Der Punkt F ist genau dann ein Fixpunkt, wenn gilt $\vec{x}_F = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_F + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_F = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$. Hieraus ergeben sich die Gleichungen $2x_{F_1} = 6$ und $2x_{F_2} = 8 \Leftrightarrow x_{F_1} = 3$ und $x_{F_2} = 4$. Diese Gleichungen wird folglich nur von den Koordinaten des Punktes $Z_1(3; 4)$ gelöst. Somit ist Z_1 der einzige Punkt, der durch f_1 auf sich selbst abgebildet wird.

(4) Um zu beweisen, dass die beiden Gleichungen äquivalent sind, müssen sie durch Äquivalenzumformungen ineinander umgeformt werden:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + (1-k)\vec{x}_Z \Leftrightarrow \\ f(\vec{x}) &= k \cdot \vec{x} + (1-k)\vec{x}_Z \Leftrightarrow \\ f(\vec{x}) - \vec{x}_Z &= k(\vec{x} - \vec{x}_Z). \end{aligned}$$

Es ist gezeigt, dass beide Definitionen einer zentrischen Streckung äquivalent sind.

b) (1) $g_{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $g_{A'B'} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Die beiden Richtungsvektoren sind linear abhängig. Es muss nun noch geprüft werden, ob die beiden Geraden identisch oder echt parallel sind. Dieses lässt sich dadurch überprüfen, indem man beispielsweise testet, ob der Punkt A in der Gerade $g_{A'B'}$ liegt: $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Da kein r existiert, das diese beiden Gleichungen löst, haben die Geraden keine Punkte gemeinsam und liegen somit echt parallel.

(2) Bei dem Viereck $A'B'AB$ handelt es sich um ein Trapez. Zunächst muss der Abstand der beiden Geraden bestimmt werden. Hierzu stellt man eine Hilfsebene E durch den Punkt A auf, die die Geraden orthogonal schneidet $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$. Diese Ebene wird mit der Geraden $g_{A'B'}$ geschnitten. Der Schnittpunkt S beschreibt zum Punkt A den Abstand d der beiden Geraden. $\left[\begin{pmatrix} -9+5r \\ 1-3r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -40 + 25r + 6 + 9r = 0 \Leftrightarrow$ $r = 1$. r eingesetzt in die Gerade $g_{A'B'}$ ergibt den Punkt $S(-4; -2)$ und $d = |\overrightarrow{SA}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$. Schließlich müssen noch die Abstände der Punkte A und B und A' und B' berechnet werden. Man erhält $|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$ und $|\overrightarrow{A'B'}| = \left|\begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{15^2 + (-9)^2} = \sqrt{306}$.

Nun kann der Flächeninhalt berechnet werden $A_{Trapez} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{A'B'}|}{2} \cdot d = 68\ [FE]$.

c) (1) Es muss gezeigt werden, dass $f_1(\overrightarrow{m_1}) = \overrightarrow{m_2}$ gilt. Für den Punkt M_1 gilt: $\overrightarrow{m_1} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$. Analog gilt für M_2: $\overrightarrow{m_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{p'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{q'}$. Einsetzen in die Abbildung ergibt: $f_1(\overrightarrow{m_1}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{m_1} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot (\frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}) + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot (\vec{p} + \vec{q}) + \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \end{pmatrix}\right) =$ $\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} - \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{q} - \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{p'} + \overrightarrow{q'}) = \overrightarrow{m_2}$.

(2) Die Geraden g, die durch das Zentrum Z_1 verlaufen haben folgende Gestalt: $g_Z: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \vec{u}$. $\vec{u}$ ist ein beliebiger Vektor. Eine Gerade g muss nun in die Abbildung eingesetzt werden: $f_1(g) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot (\vec{x} + r \cdot \vec{u}) + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} \doteq \vec{x} + 3r \cdot \vec{u}$. Da der Vektor $\vec{u}$ nur die Richtung angibt und die Länge keine Rolle spielt, handelt es sich immer noch um die gleiche Gerade g trotz des Faktors 3. So ist gezeigt, dass die Geraden g Fixgeraden sind.

d) (1) Zunächst ist die Abbildung f_2 zu berechnen:

$$f_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot (\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nun kann die Verkettung $f_2 \circ f_1$ gebildet werden

$$f_2 \circ f_1(\vec{x}) = f_2(f_1(\vec{x})) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f_1 \circ f_2(\vec{x}) = f_1(f_2(\vec{x})) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(2) Da $\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}-9\\-2\end{pmatrix}$ ist, gilt $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$.

(3) In Teilaufgabe a) (4) wurde bewiesen, dass die Definition einer zentrischen Streckung äquivalent ist zu $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}k & 0\\0 & k\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + (1-k) \cdot \vec{x}_Z$. Für die Verkettung $f_2 \circ f_1$ gilt $f_2 \circ f_1(\vec{x}) = f_2(f_1(\vec{x})) = \begin{pmatrix}1,5 & 0\\0 & 1,5\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,5 & 0\\0 & 1,5\end{pmatrix} \cdot \vec{x} + (1-1,5) \cdot \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$. Es ist nun gezeigt, dass die Verkettung $f_2 \circ f_1$ eine zentrische Streckung ist mit dem Zentrum $Z(8;4)$ und dem Streckfaktor $k = 1,5$.

HT8 Stochastik

a) (1) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Spender mit der Blutgruppe A Rh-. Sie ist hier binomialverteilt. Mit $n = 90$ und $p = 0,06$ berechnet man $P(X \leq 2) = B_{90;0,06}(X \leq 2) = \binom{90}{0} \cdot 0,006^0 \cdot 0,94^{90} + \binom{90}{1} \cdot 0,06^1 \cdot 0,94^{89} + \binom{90}{2} \cdot 0,06^2 \cdot (0,94)^{88} \approx 0,088$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 90 Spendern maximal zwei der Blutgruppe A Rh- dabei sind beträgt ungefähr $8,8\%$.

(2) Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Spender mit der Blutgruppe AB. Auch sie ist wieder binomialverteilt. Mit $n = 100$ und $p = 0,05$ berechnet man $P(Y \geq 5) = B_{100;0,05}(Y \geq 5) = 1 - B_{100;0,05}(Y \leq 4) = 1 - (\binom{100}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,095^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0,05^1 \cdot 0,95^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^{98} + \binom{100}{3} \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^{97} + \binom{100}{4} \cdot 0,05^4 \cdot (0,95)^{96}) \approx 1 - 0,4260 = 0,5639$.

b) Die Zufallsgröße Z (Anzahl der Spender mit Blutgruppe AB Rh-) ist auch in diesem Fall wieder binomialverteilt. Es muss die folgende Gleichung gelöst werden: $P(Z \geq 1) > 0,99 \Leftrightarrow 1 - P(Z = 0) > 0,99 \Leftrightarrow P(Z = 0) < 0,01 \Leftrightarrow \binom{n}{0} \cdot 0,01^0 \cdot 0,99^n < 0,01 \Leftrightarrow 0,99^n < 0,01 \Leftrightarrow n \cdot ln(0,99) < ln(0,01) \Leftrightarrow n > \frac{ln(0,01)}{ln(0,99)} \approx 458,21$. Es müssen 459 Personen Blut Spenden, damit mit einer Wahrschheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal die Blutgruppe AB Rh- dabei ist.

c) (1) Bei einer Gruppe von k Personen ist entweder eine Untersuchung erforderlich (dies ist der Fall wenn alle k Personen gesund sind) oder es sind k+1 Untersuchungen erforderlich (wenn mindestens eine Person mit HIV infiziert ist). Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung stellt man sich die verschidenen Möglichkeiten als Baumdiagramm vor. Sind alle Personen der Gruppe gesund, gibt es nur einen möglichen Weg, den man im Baumdiagramm gehen kann. Sind k+1 Untersungen erforderlich, müssen alle möglichen Wege des Baumdiagramms mit berücksichtigt werden, bei denen mindestens eine Person HIV hat. Dies ist genau die Gegenwahrscheinlichkeit zum vorigen Fall. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung erhält man dann:

$$\begin{aligned} X = 1 \quad &\Longrightarrow \quad P(X = 1) = q^k = 0,9993^k \\ X = k+1 \quad &\Longrightarrow \quad P(X = k+1) = 1 - q^k = 1 - 0,9993^k. \end{aligned}$$

(2) Die Anzahl der Tests, die bei einer Gruppe von k Personen im Durchschnitt erforderlich sind, berechnet man mit Hilfe des Erwartungswertes:
$E(X) = 1 \cdot q^k + (k+1) \cdot (1 - q^k) = k + 1 - k \cdot q^k$. Würden keine Gruppen eingeteilt werden, würden bei k Personen auch k Tests durchgeführt werden müssen. So ergibt sich durch die Gruppeneinteilung pro Person eine Ersparnis von $G(k) = \frac{k-(k+1-k \cdot q^k)}{k} = \frac{-1+k \cdot q^k}{k} = q^k - \frac{1}{k} = 0,9993^k - \frac{1}{k}$.

(3) Bei einer Gruppengröße von 40 Personen spart man pro Person gegenüber der Einzeluntersuchung $G(40) = (0,9993^{40} - \frac{1}{40}) \approx 0,9474$.

d) Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Personen mit der Blutruppe B. Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit dem zu bestimmenden Personenumfang n und dem tatsächlichen Personenanteil p mit Blutgruppe B. Zu lösen ist die folgende Gleichung: $P(|\frac{X}{n} - p| \leq 0,05) \geq 0,9 \Leftrightarrow P(np - 0,05n \leq X \leq np + 0,05n) \geq 0,9$. Betrachtet man Tabelle 1 (σ-Regeln für Binomialverteilungen), erkennt man die Beziehung: $0,05n \geq 1,64\sigma$. Mit $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \Rightarrow \frac{0,05}{1,64} \geq \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$. Für den Personenanteil p mit Blutgruppe B gilt $0,1 \leq p \leq 0,2$. Der zu bestimmende Personenumfang n muss für alle p gelten, deshalb muss der Term $p \cdot (1-p)$ maximal gewählt werden. Dies ist genau dann der Fall, wenn $p = 0,2$ gilt. So ergibt sich $n \geq \dfrac{p \cdot (1-p)}{(\frac{0,05}{1,64})^2} = \frac{0,16}{(\frac{0,05}{1,64})^2} \approx 172,13$. Die Stichprobe muss dem zufolge einen Umfang von mindestens 173 Personen haben.

e) Die Zufallsgröße X beschreibe wieder die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B. Sie ist binomialverteilt mit dem zu bestimmenden tatsächlichen Anteil p von Personen mit Blutgruppe B und den $n = 200$ Personen, die an der Untersuchung teilgenommen haben. Zu lösen ist nun die folgende Gleichung: $\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma \Leftrightarrow \mu - 2\sigma \leq 17 \leq \mu + 2\sigma$. Schreibt man die Ungleichungen separat auf ergeben sich die beiden Ungleichungen

$$\mu - 2\sigma \leq 17 \quad \Leftrightarrow \quad np - 2 \cdot \sqrt{np(1-p)} \leq 17 \;\Leftrightarrow\; 200 \cdot p - 2 \cdot \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)} \leq 17 \text{ und}$$
$$\mu + 2\sigma \geq 17 \quad \Leftrightarrow \quad np + 2 \cdot \sqrt{np(1-p)} \geq 17 \;\Leftrightarrow\; 200 \cdot p + 2 \cdot \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)} \geq 17.$$

Beide Male erhält man die Ungleichung $200p - 17 \leq 2\sqrt{200p(1-p)} \Rightarrow (200p - 17)^2 \leq 4(200p(1-p)) \Leftrightarrow 40800p^2 - 7600p + 289 \leq 0$. Man kann entweder die Ungleichung mit der pq-Formel lösen oder man berechnet sie mit dem GTR. Hieraus ergibt sich die Lösung $0,0532 \leq p \leq 0,1330$. Der tatsächliche Anteil p der Personen mit Blutgruppe B liegt ungefähr zwischen $5,3\%$ und $13,3\%$.

Redaktionelle Leitung: Simone Senk
Redaktion: Christa Becker
Autorin: Tamara Jordan